JMBO
Jurnal Manajemen Bisnis dan Organisasi

OPERATIONAL MANAGEMENT: DYNAMIC ANALYSIS IN ADDRESSING LAKE ENVIRONMENTAL POLLUTION

Rangga Wirawan[1]

[1] Universitas Muhammadiyah Bandung, Bandung (40614)
* Corresponding Author: rangga.wirawan@umbandung.ac.id

ARTICLE INFO

Articles History:
Accepted tgl. 17/05/2025
Repaired tgl. 18/05/2025
Approved tgl. 27/05/2025
Available online tgl. 28/05/2025

ISSN-E: *2962-4746*
ISSN-P: *2961-8312*

DOI:
10.58290/jmbo.v4i1.402

ABSTRACT

Pollution is a serious problem that must be addressed in the environmental world. So it is necessary to have control to determine the extent to which pollutants have a harmful impact on the environment. This paper discusses mathematical modeling for pollutant distribution systems in lakes, determining the equilibrium point (fixed point) to determine the equilibrium in the model, analyzing the stability of the model to find the eigenvalue, then finding a solution using the numerical method VIM (Variational Iteration Method) to determine the amount of pollutants dissolved in the lake.

Keywords:
Pollution, Pollutant, Equilibrium, Eigenvalues, VIM

©2025. Published By Jurnal Manajemen Bisnis dan Organisasi (JMBO). This article is open access under the Creative Commons Attribution License CC BY (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)

PENDAHULUAN

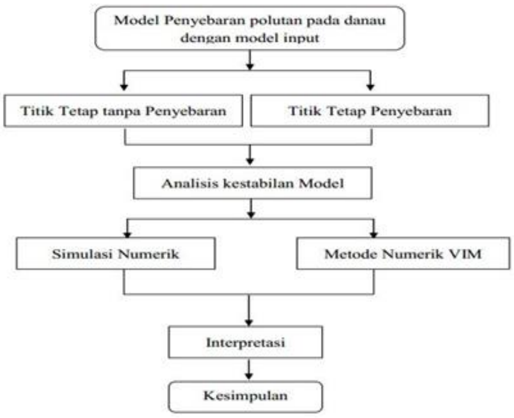
Polusi merupakan masalah serius yang harus ditangani di dalam dunia lingkungan, karena keberadaannya telah mengganggu stabilitas ekosistem makhluk hidup. Polusi juga dapat mengancam habitat makhluk hidup yang berada di suatu tempat karena memiliki zat-zat yang berbahaya sehingga populasi makhluk hidup merasa terancam akibat keberadaannya. Oleh karena itu, perlu adanya upaya pengontrolan untuk mencegah penyebaran polutan di danau. Salah satu upaya untuk melakukan pengontrolan penyebaran polutan di dalam danau agar dapat diketahui tingkat penyebaran polutan dari waktu ke waktu, yaitu dengan mengaplikasikan model matematika untuk menyelidiki seberapa jauh akibat penyebaran polutan pada danau yang saling terhubung dengan danau yang lain, disertai dengan upaya mengambil langkah untuk pengendalian penyebaran polutan di danau.

Dalam jurnal yang berkaitan dengan model penyebaran polutan hanya membahas tentang pemodelan matematika dalam penyebaran polutan di danau beserta solusinya dengan metode VIM (*Varitional Iteration Method*) [3], yaitu metode numerik yang pengerjaannya dilakukan secara rekursif sehingga akhirnya tingkat polutan danau dari waktu ke waktu. Sedangkan pada penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian sebelumnya[3] dengan mengembangkan model input polutan ada pada setiap danau kemudian adanya analisis titik tetap dan kestabilan pada model serta solusi numerik dengan Software MAPLE.

Tujuan dari paper ini adalah mengkonstuksi model matematika, mencari titik tetap, menganalisis kestabilan, mencari solusi dengan metode VIM (*Varitional Iteration Method*) untuk mengetahui tingkat penyebaran polutan dari tiap periode.

METODE PENELITIAN

Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini adalah pemodelan matematika dan studi literatur. Di dalam penelitian ini, pemodelan matematika telah terbukti banyak memberikan kontribusi diantaranya dalam memahami penyebaran polusi yang terjadi pada danau. Studi literatur adalah teknik pengumpulan data dengan mengadakan studi penelaahan terhadap buku-buku, literatur-literatur, catatan-catatan dan laporan-laporan yang berhubungan dengan masalah yang akan diselesaikan. Langkah-langkah penelitian pada jurnal ini dapat dilihat melalui diagram alur berikut:



Gambar 1. Diagram Alur Penelitian.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Asumsi Model

Asumsi yang digunakan pada model ini yaitu :

Banyaknya kadar polutan pada danau dapat dibagi menjadi 3 bagian :

- Jumlah polutan pada danau 1 ($x_1(t)$).
- Jumlah polutan pada danau 2 ($x_2(t)$).
- Jumlah polutan pada danau 3 ($x_3(t)$).

Tabel 1. Notasi

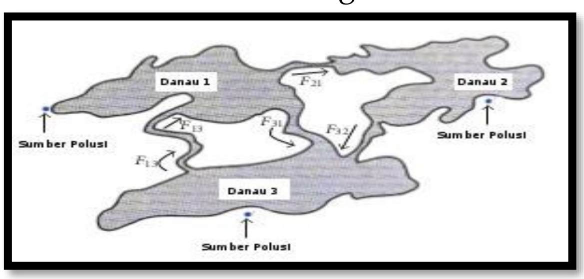
Notasi	Keterangan
F_{13}	Debit aliran polutan danau ke 3 ke danau 1
F_{31}	Debit aliran polutan danau ke 1 ke danau 3
F_{21}	Debit aliran polutan danau ke 1 ke danau 2
F_{32}	Debit aliran polutan danau ke 2 ke danau 3
V_1	Jumlah volume pada danau ke 1
V_2	Jumlah volume pada danau ke 2
V_3	Jumlah volume pada danau ke 3
$p_1(t)$	Model input polutan pada danau ke 1
$p_2(t)$	Model input polutan pada danau ke 2
$p_3(t)$	Model input polutan pada danau ke 3
t	Waktu

Sumber: Diolah peneliti, 2025

Model Matematika

Gambar 2 memperlihatkan sistem dari tiga danau yang saling terhubung. Masing-masing danau saling terhubung dimana ada aliran kanal yang saling terkoneksi dari ketiga danau tersebut

Gambar 2. Sistem dari tiga danau



Sumber: Diolah peneliti, 2025

Aliran di kanal yang ditunjukan oleh

panah di Gambar 2, sebuah polutan memasuki danau dengan $p_i(t)$

$$danau\,1:\; F_{13} = F_{21} + F_{31},$$
$$danau\,2:\; F_{21} = F_{32},$$
$$danau\,3:\; F_{31} + F_{32} = F_{13},$$

dinotasikan laju polutan yang memasuki danau i per satuan waktu dimana i = 1,2, dan 3. Fungsi $p_i(t)$ boleh konstan atau bermacam dengan unit waktu. Sehingga dapat diketahui level polusi di masing-masing danau pada tiap waktu.$x_i(t)$ dinotasikan sebagai jumlah volume polutan yang terlarut di danau i pada saat waktu $t \geq 0$ dimana i = 1,2,3. Kemudian diasumsikan polutan di masing-masing danau yang terdistribusi secara bebas dengan cara proses pencampuran. Kemudian konsentrasi dari polutan di danau i pada saat waktu t di berikan sebagai berikut

$$c_i(t) = \frac{x_i(t)}{V_i}. \qquad (1)$$

Masing-masing danau secara inisial diasumsikan bebas dari kontaminasi, jadi $x_i(0) = 0$ untuk masing-masing i = 1,2,3. Untuk model perlakuan secara dinamis dari sistem pada danau, kemudian ambil konstanta F_{ji} dinotasikan sebagai debit aliran dari danau i ke danau j pada saat waktu t, lalu laju polutan yang mengalir dari danau i ke danau j pada saat waktu t, dinotasikan oleh $r_{ji}(t)$, didefinisikan sebagai

$$r_{ji}(t) = F_{ji}c_i(t) = \frac{F_{ji}}{V_i}x_i(t). \qquad (2)$$

Kemudian $r_{ji}(t)$ merupakan ukuran dari laju dimana konsentrasi dari polutan i yang mengalir pada j pada waktu t.
Dari persamaan tersebut maka diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = p_1(t) + \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t) - \left(\frac{F_{31}+F_{21}}{V_1}\right)x_1(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = p_2(t) + \frac{F_{21}}{V_1}x_1(t) - \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t)$$
$$\frac{dx_3(t)}{dt} = p_3(t) + \frac{F_{31}}{V_1}x_1(t) + \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t) - \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t) \qquad (3)$$

Agar posisi setimbang, maka debit aliran yang masuk masing-masing danau sama dengan debit aliran keluar, yang dapat ditulis dengan persamaan berikut.

Analisis Model

1. Titik Tetap

Titik tetap diperoleh saat masing-masing persamaan penyebaran polutan pada danau mencapai nilai nol atau pada saat terjadi *"zero growth rate"*, yaitu suatu kondisi keseimbangan dimana jumlah polutan pada suatu danau dalam waktu tertentu mendekati nol. Sehingga didapatkan persamaan berikut :

$$p_1(t) + \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t) - \left(\frac{F_{31}+F_{21}}{V_1}\right)x_1(t) = 0,$$
$$p_2(t) + \frac{F_{21}}{V_1}x_1(t) - \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t) = 0,$$
$$p_3(t) + \frac{F_{31}}{V_1}x_1(t) + \frac{F_{32}}{V_2}x_2(t) - \frac{F_{13}}{V_3}x_3(t) = 0, \qquad (4)$$

Tabel 2. Interpretasi Hasil Titik Tetap Danau

No.	Titik Tetap danau	Kesimpulan
1.	(0,0,0)	Model akan mencapai kesetimbangan apabila di setiap danau 1,2, dan 3 tidak terjadi polusi.
2.	$\left(0, \frac{V_2}{F_{32}}p_2(t), \frac{V_3}{F_{13}}(p_2(t)+p_3(t))\right)$	Model akan mencapai kesetimbangan apabila tidak terjadi polusi di danau 1 dan hanya terjadi di danau 2 dan danau 3 karena pengaruh input polutan $p_2(t)$ dan $p_3(t)$.
3.	$\left(\frac{V_1}{F_{21}}(p_1(t)+p_3(t)), 0, \frac{V_3}{F_{13}}\left(\frac{F_{31}}{F_{21}}p_1(t) + \frac{F_{31}+F_{21}}{F_{21}}p_3(t)\right)\right)$	Model akan mencapai kesetimbangan apabila tidak terjadi polusi di danau 2 dan hanya terjadi di danau 1 dan danau 3 karena pengaruh input polutan $p_1(t)$ dan $p_3(t)$.
4.	$\left(\frac{V_1}{F_{31}+F_{21}}p_1(t), \frac{V_2}{F_{32}}\left(\frac{F_{21}}{F_{31}+F_{21}}p_1(t)+p_2(t)\right), 0\right)$	Model akan mencapai kesetimbangan apabila tidak terjadi polusi di danau 3 dan hanya terjadi di danau 1 dan danau 2 karena pengaruh input polutan $p_1(t)$ dan $p_2(t)$.

Sumber: Diolah peneliti, 2025

2.Matriks Jacobian, Persamaan Karakteristik, Nilai Eigen dan Kestabilan

Analisis kestabilan pada model penyebaran polutan di danau telah diuji dengan tahapan sebagai berikut :

a. Pencarian Matriks Jacobian yang

diperoleh sebagai berikut :

$$J(A) = \begin{bmatrix} -\frac{(F_{31}+F_{21})}{V_1} & 0 & \frac{F_{13}}{V_3} \\ \frac{F_{21}}{V_1} & -\frac{F_{32}}{V_2} & 0 \\ \frac{F_{31}}{V_1} & \frac{F_{32}}{V_2} & -\frac{F_{13}}{V_3} \end{bmatrix}$$

b. Persamaan Karakteristik yang diperoleh sebagai berikut :

$$\lambda^3 + \left(\frac{F_{31}}{V_1} + \frac{F_{21}}{V_1} + \frac{F_{32}}{V_2} + \frac{F_{13}}{V_3}\right)\lambda^2 + \left(\frac{F_{31}}{V_1}\frac{F_{32}}{V_2} + \frac{F_{21}}{V_1}\frac{F_{32}}{V_2} + \frac{F_{13}}{V_3}\frac{F_{21}}{V_1} + \frac{F_{13}}{V_3}\frac{F_{32}}{V_2}\right)\lambda = 0$$

c. Nilai Eigen yang diperoleh

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{-(a+b+c+d) - \sqrt{(a+b+c+d)^2 - 4(bd+cd+ac+ad)}}{2}\right),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{-(a+b+c+d) + \sqrt{(a+b+c+d)^2 - 4(bd+cd+ac+ad)}}{2}\right),$$

Dengan misal $a = \frac{F_{13}}{V_3}, b = \frac{F_{31}}{V_1}, c = \frac{F_{21}}{V_1}, d = \frac{F_{32}}{V_2}$

Sehingga dari nilai eigen itu dianalisis kemudian memiliki hasil yang stabil dan stabil asimtotik, kemudian diuji dengan kriteria Routh-Hurwitz sehingga dapat disimpulkan model penyebaran polutan di danau stabil.

Solusi Model

1. Model Sinusoidal dengan solusi numerik dengan metode VIM

Model Sinusoidal input digunakan untuk polutan yang memasuki danau secara periodik dan fluktuatif. Contoh kasus $p(t) = 1 + \sin(t)$, dan parameter diperlihatkan sebagai berikut :

$V_1 = 2900\ m^3$, $V_2 = 850\ m^3$, $V_3 = 1180\ m^3$,
$F_{21} = 18\ {m^3}/{tahun}$, $F_{32} = 18\ {m^3}/{tahun}$,
$F_{31} = 20\ {m^3}/{tahun}$, $F_{13} = 38\ {m^3}/{tahun}$,

Data mengenai paramater diambil dari jurnal [3].

Dari persamaan (3) diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= (1+\sin(t)) + \frac{38}{1180}x_3(t) - \frac{38}{2900}x_1(t), \\ x_2'(t) &= (1+\sin(t)) + \frac{18}{2900}x_1(t) - \frac{18}{850}x_2(t), \\ x_3'(t) &= (1+\sin(t)) + \frac{20}{2900}x_1(t) + \frac{18}{850}x_2(t) - \frac{38}{1180}x_3(t), \\ & x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan penerapan VIM diperoleh

$$\begin{aligned} x_{1_{n+1}}(t) &= x_{1_n}(t) - \int_0^t \left\{x_{1_n}'(\xi) - \frac{38}{1180}\tilde{x}_{3_n}(\xi) - (1+sin(\xi)) + \frac{38}{2900}\tilde{x}_{1_n}(\xi)\right\}d\xi, \\ x_{2_{n+1}}(t) &= x_{2_n}(t) - \int_0^t \left\{x_{2_n}'(\xi) - \frac{18}{2900}\tilde{x}_{1_n}(\xi) - (1+sin(\xi)) + \frac{18}{850}\tilde{x}_{2_n}(\xi)\right\}d\xi, \\ x_{3_{n+1}}(t) &= x_{3_n}(t) - \int_0^t \left\{x_{2_n}'(\xi) - \frac{20}{2900}\tilde{x}_{1_n}(\xi) - (1+sin(\xi)) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{18}{850}\tilde{x}_{2_n}(\xi) + \frac{38}{1180}\tilde{x}_{3_n}(\xi)\right\}d\xi, \end{aligned} \tag{6}$$

Sehingga dengan Software MAPLE diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 3. Hasil perhitungan model Sinusoidal

n	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1	0.00	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000000
2	0.01	0.01004999960	0.01004999960	0.01004999960
3	0.02	0.02020383894	0.02019697982	0.02019916214
4	0.03	0.03045864450	0.03044316526	0.03044808924
5	0.04	0.04081537249	0.04078776332	0.04079654519
6	0.05	0.05127400458	0.05123072529	0.05124448863
7	0.06	0.06183451353	0.06177199166	0.06179187481
8	0.07	0.07249686346	0.07241149382	0.07243864052
9	0.08	0.08326101066	0.08314915126	0.08318471889
10	0.09	0.09412689496	0.09398487616	0.09403003068
11	0.10	0.10509445040	0.10491856860	0.10497448580

Sumber: Diolah peneliti, 2025

Berdasarkan perhitungan dengan metode VIM untuk model Sinusoidal telah terjadi kenaikan pada tiga danau. Namun disini nilai tertinggi kadar polutan berada di danau 1 dengan nilai 0.1051.

2. Model Impuls dengan Solusi Numerik menggunakan metode VIM

Model ini memiliki karakteristik masuknya polutan ke dalam danau dengan laju yang mirip dengan laju tetap. Sekarang diasumsikan *p(t)* = 100 dan berdasarkan persamaan (3) maka akan diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 100 + \frac{38}{1180}x_3(t) - \frac{38}{2900}x_1(t) \\ x_2'(t) &= 100 + \frac{18}{2900}x_1(t) - \frac{18}{850}x_2(t), \\ x_3'(t) &= 100 + \frac{20}{2900}x_1(t) + \frac{18}{850}x_2(t) - \frac{38}{1180}x_3(t), \\ & x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Lalu dengan metode VIM dengan langkah seperti persamaan (6), maka diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 4. Hasil perhitungan model Impuls.

n	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1	0.00	0.000000000	0.000000000	0.000000000
2	0.01	1.000000000	1.000000000	1.000000000
3	0.02	2.000381999	1.999700609	1.999917393
4	0.03	3.000859325	2.999326565	2.999814109
5	0.04	4.001527586	3.998802899	3.999669515
6	0.05	5.002386694	4.998129710	4.999483595
7	0.06	6.003436609	5.997307044	5.999256346
8	0.07	7.004677295	6.996334943	6.998987762
9	0.08	8.006108711	7.995213451	7.998677837
10	0.09	9.007730820	8.993942612	8.998326568
11	0.10	10.00954358	9.992522467	9.997933948

Sumber: Diolah peneliti, 2025

Berdasarkan perhitungan dengan metode VIM untuk model Impuls telah terjadi kenaikan pada tiga danau. Namun disini nilai tertinggi kadar polutan berada di danau 1 dengan nilai 10.0096.

3. Model *Step* dengan Solusi Numerik menggunakan metode VIM

Model *Step* ini memiliki karakterisitik model input polutan yang masuk ke dalam danau seperti fungsi tangga. Sekarang diasumsikan *p(t)* = *100t*, jadi berdasarkan persamaan (3) akan diperoleh

$$
\begin{aligned}
x_1'(t) &= 100t + \frac{38}{1180}x_3(t) - \frac{38}{2900}x_1(t)\\
x_2'(t) &= 100t + \frac{18}{2900}x_1(t) - \frac{18}{850}x_2(t),\\
x_3'(t) &= +100t + \frac{20}{2900}x_1(t) + \frac{18}{850}x_2(t) - \frac{38}{1180}x_3(t),\\
x_1(0) &= 0\,, x_2(0) = 0\,, x_3(0) = 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

Lalu dengan metode VIM dengan langkah seperti persamaan (6), maka diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 5. Hasil perhitungan model Step

n	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1	0.00	0.00000000000	0.00000000000	0.00000000000
2	0.01	0.00500000000	0.00500000000	0.00500000000
3	0.02	0.02000254666	0.01999800406	0.01999944928
4	0.03	0.04500859368	0.04499326516	0.04499814115
5	0.04	0.08002036918	0.07998403710	0.07999559371
6	0.05	0.1250397815	0.1249688247	0.1249913937
7	0.06	0.1800687391	0.1799461330	0.1799851279
8	0.07	0.2451091497	0.2449144675	0.2449763829
9	0.08	0.3201629208	0.3198723339	0.3199647453
10	0.09	0.4052319595	0.4048182387	0.4049498017
11	0.10	0.5003181727	0.4997506885	0.4999311388

Sumber: Diolah peneliti, 2025

Berdasarkan perhitungan dengan metode VIM untuk model Impuls telah terjadi kenaikan pada tiga danau. Namun disini nilai tertinggi kadar polutan berada di danau 1 dengan nilai 0.5003.

SIMPULAN

Dari hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa model matematika yang telah diterapkan, baik dengan model Input seperti Sinusoidal, *Impuls* dan *Step*, kadar polutan dalam danau mengalami kenaikan dalam setiap waktunya sehingga perlu adanya antisipasi ketika danau mengalami kenaikan. Kemudian diperoleh hasil kadar polutan tertinggi terjadi pada danau 1 dengan kadar tertinggi berada pada model input Impuls yaitu 10.0096.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anggriani, Nursanti. 2012. *Aljabar Linear Persamaan Diferensial dan Sistem Dinamik dalam Model Matematika Epidemiologi*. Bandung : Unpad Press.

[2] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Jakarta : Erlangga.

[3] Biazar, J dan Shahbala, M. 2010. *VIM for Solving the Pollution Problem of a System of Lakes*. Iran : Hindawi Publishing Corporation.

[4] Boyce, W. E. dan DiPrima, R. C. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. New York : John Wiley and Sons, Inc.

[5] Giordano, Frank dan Maurice. 1994. *Differential Equations A Modelling Approach.* United States of America. Addison – Wesley Publishing Company, Inc.

[6] Nazir, Muhammad. 2003. *Metode Penelitian*. Jakarta : Ghalia Indonesia.